Extra Lesmateriaal Logica

Alexander Holvoet

Academiejaar 2020–2021

Inleiding

Dit document bevat ondersteunend lesmateriaal voor logica in de wiskundeles. Het doelpubliek en de moeilijkheidsgraad variëren en worden aangegeven in de begeleidende tekst in Sectie 6. Dit materiaal werd ontwikkeld in het kader van mijn Masterthesis. Deze pdf kan u terugvinden op de persoonlijke website van mijn promotor. Originele LaTeX-bestanden kunnen verkregen worden door te mailen naar alexanderholvoet23@gmail.com.

Inhoudsopgave

1 Lijst van verschillen met omgangstaal **3**

2 Over de implicatie in propositielogica **6**

2.1 Motivatie 6

2.2 Pijnpunten 10

3 Visualisatie **12**

3.1 Vierkant voor Contrapositie 12

3.2 Waarheidsmatrices 13

4 Instap voor logica vertrekkend van omgangstaal **15**

4.1 Inleiding op logica 15

4.2 Implicatie 17

4.3 Negatie 20

4.4 Disjunctie 22

4.5 Conjunctie 24

4.6 Kwantoren 25

5 Verdiepingsoefeningen **27**

5.1 True, False of "Unknown"? Voorbij de propositielogica 27

5.2 Identieke operaties 31

5.3 Connectieven uitdrukken met andere connectieven 33

6 Begeleidende Tekst voor Leerkrachten **35**

7 Oplossingsleutel **43**

1 Lijst van verschillen met omgangstaal

In deze Sectie is een lijst van verschillen tussen de alledaagse omgangstaal en de formele logicataal opgenomen. We ordenen de verschillen volgens de connectieven in de predicatenlogica.

- $\neg$ De logische negatie lijkt op het eerste zicht redelijk gelijkaardig aan de negatie in de omgangstaal. Er zijn veel problemen met hoe de negatie zich verhoudt tot andere connectieven (negatie van een implicatie, negatie van kwantoren, ... zijn moeilijk), maar deze lijken niet onmiddellijk te liggen aan een verschil in gebruik qua taal. Wat wel een verschil is, is dat in de omgangstaal veel zaken niet zwart-wit zijn, terwijl dat in propositielogica wel zo is. In propositielogica is $\neg\neg p$ equivalent met p, maar "Ik ben niet kwaad." betekent niet hetzelfde als "Ik ben blij."

- $\vee$ Het belangrijkste verschil met de omgangstaal is het exclusief, dan wel inclusief zijn. In propositielogica is $p \vee q$ waar wanneer minstens één van de componenten waar is, dus ook als p en q beiden waar zijn. Dit noemen we de inclusieve of (ook wel *disjunctie* genaamd). Daartegenover staat de exclusieve "of" die waar is als exact één van de componenten waar is. In de omgangstaal wordt vaak "of" voor de exclusieve of gebruikt, maar soms ook voor de inclusieve. Bijvoorbeeld in "Ze heeft goed gestudeerd; ze heeft goed gestudeerd of gemakkelijke vragen gekregen." wordt de inclusieve of gebruikt. In "Wil je koffie of thee?" wordt een exclusieve of gebruikt.

- $\wedge$ Het meestgenoemde verschil met de omgangstaal voor dit connectief is de symmetrie. De logische en (ook wel *conjunctie* genaamd) is symmetrisch, dus $p \wedge q$ is equivalent met $q \wedge p$. In de omgangstaal kan er echter een tijdsverschil zitten tussen de twee componenten. Denk aan bijvoorbeeld "Ik zal studeren en een aflevering van mijn favoriete serie bekijken.", wat volgens de ouders van deze leerling niet overeen komt met "Ik zal een aflevering van mijn favoriete serie kijken en studeren.". Naast een verschil in tijdsvolgorde kan er ook een verschil in belangrijkheid zijn; het belangrijkste wordt eerst vermeld.

  Een minder voorkomend maar wel interessant verschil is dat "en" soms voor inclusieve "of" gebruikt wordt. Bijvoorbeeld met "Ik bracht de groene en de rode ballen mee." wordt "Ik bracht de ballen mee die groen of rood zijn." bedoeld.

Een laatste verschil dat vrij subtiel is, is dat in het Nederlands "en" ook gebruikt wordt tussen objecten, en niet enkel tussen uitspraken. Zowel " Alice en ik zijn slim." als "Alice is slim en ik ben slim." zijn aanvaardbare uitspraken in het Nederlands met de zelfde betekenis. In predicatenlogica kan een $\wedge$ tussen twee objecten echter niet, en is dus eigenlijk enkel de tweede zin uit te drukken. In het voorbeeld geeft dat niet echt een probleem, aangezien "slim zijn" een eigenschap is die doelt op zowel "Alice" als "ik" afzonderlijk. Bij de volgende zin is het echter moeilijker: "Alice en ik hebben veel knikkers.". Die zin is niet hetzelfde als "Alice heeft veel knikkers en ik heb veel knikkers.".

$\Rightarrow$ Dit connectief is vaak het moeilijkst voor de leerlingen, en daarmee gepaard ook het meest frappant verschillend met de omgangstaal. In de omgangstaal wordt met de "als ..., dan ..." soms een equivalentie, soms enkel een implicatie uitgedrukt. Dit is duidelijk door de context. De zin "Als je goed studeert, dan krijg je een cadeau." bevat in principe enkel een implicatie, maar iedereen zal in die situatie de zin begrijpen als equivalentie: "Als je goed studeert, en enkel dan, krijg je een cadeau.". In de wiskunde en logica zijn deze twee echter strikt gescheiden, en wordt met $\Rightarrow$ altijd enkel een implicatie bedoeld.

Naast het wisselen tussen implicatie en equivalentie is er nog een ander belangrijk verschil tussen de omgangstaal en de implicatie in propositielogica. Propositielogica kijkt enkel naar de waarheid van de deeluitspraken, en niet naar de inhoudelijke verbanden. Een zin als "Als de maan gemaakt is van kaas, dan ben ik de beste wiskundige ter wereld." is waar volgens de propositielogica. In de omgangstaal verwachten/eisen we een inhoudelijk verband (en dan nog liefst een oorzakelijk verband) tussen de aanname en de conclusie van een implicatie. In Sectie 2 gaan we verder in op deze verschillen.

$\forall, \exists$ De betekenis van kwantoren is niet zo strikt in de omgangstaal als in de wiskunde/logica. Als we in logica $\forall$ schrijven, dan bedoelen we effectief **alle** gevallen. Gelijkaardig bedoelen we met $\exists$ minstens **één** geval (wat heel weinig kan zijn in vergelijking met de volledige verzameling). In de omgangstaal is deze betekenis losser ingevuld. Bij gebruik van "alle" of "iedere" kan men "de meeste" of "elk geval dat ik individueel controleerde" bedoelen. Gelijkaardig betekent "sommige" of "er zijn ..." vaak dat er niet slechts één, maar wel een redelijk deel van de volledige verzameling voldoet. Als je naar het strand gaat, en zegt dat "alle" plaatsen bezet zijn, dan bedoel je hoogstwaarschijnlijk dat de meeste plaatsen bezet zijn en het moeilijk is om zelf een plaatsje te vinden. Je bedoelt niet dat **elke** mogelijke plaats bezet is. Gelijkaardig betekent de uitspraak “Sommige mensen waren kleurrijk gekleed.”, afhankelijk van de context, waarschijnlijk dat er meer dan één persoon kleurrijk gekleed was.

Het lidwoord “een” kan zowel gebruikt worden voor $\exists$ als voor $\forall$. Vergelijk hiervoor “Een mens heeft wel eens ontspanning nodig.” met “Een leerling van mij is op reis gegaan naar Ierland.”.

Naast dat verschil in hoe strikt de betekenis is, wordt er ook losser omgesprongen met het verschil in betekenis bij een andere volgorde van kwantoren, en is het opnieuw vaak duidelijk uit de context. In wiskunde betekent $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$ iets helemaal anders dan $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x < y$. In de omgangstaal zegt het spreekwoord “Op ieder potje past een dekseltje.” dat iedereen iemand kan vinden die bij hem/haar past. Mocht je echter “Er is een passend dekseltje voor ieder potje.” zeggen, dan zou nog steeds iedereen hetzelfde verstaan. Logisch gezien beweert deze laatste uitspraak echter dat er één magisch dekseltje is dat op iedere pot past, aangezien de volgorde van kwantoren wordt omgedraaid.

Tot slot is er iets dat zowel in de wiskunde als in de omgangstaal iets anders aangepakt wordt dan in de logica. De logische uitspraak $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ heeft technisch gezien geen waarheidswaarde (waarbij P en Q twee predicaten zijn), aangezien x nog niet ingevuld is of gebonden is aan een kwantor. In de omgangstaal en in de wiskunde wordt met dergelijke uitspraken vaak $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$ bedoeld, wat wel een waarheidswaarde heeft, aangezien x gebonden is aan de kwantor. Het verschil/probleem komt boven, wanneer $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ waar is voor sommige x, maar niet voor allemaal. Neem bijvoorbeeld $P(x) =$“x is deelbaar door 2” en $Q(x) =$“x is deelbaar door 6”. Dan wordt $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ gelijk aan “Als x deelbaar is door 2, dan is x deelbaar door 6.”. Logici zouden zeggen dat die uitspraak geen waarheidswaarde heeft. Wiskundigen zouden beweren dat die uitspraak vals is, aangezien er gevallen zijn voor x waarbij $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ vals is. Ze lezen het dus als $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$. Leerlingen zouden zeggen dat de waarheidswaarde afhangt van x, wat eigenlijk dichter aansluit bij de logici.

2 Over de implicatie in propositielogica

We bespraken in Sectie 1 reeds enkele verschillen tussen logica en omgangstaal. Dit geeft aanleiding tot problemen met de implicatie, en onder andere ook bij de introductie van zijn waarheidstabel. We starten dus met een lijst van argumenten die de waarheidstabel van $\Rightarrow$ aannemelijker maken. Vervolgens is er een oefening ter verdieping die enkele vreemde eigenschappen van $\Rightarrow$ onderzoekt.

2.1 Motivatie

We vertrekken in deze lijst van de uitspraak $p \Rightarrow q$, indien niet gespecifieerd. Afhankelijk van het gebruikte argument hieronder kun je gepaste zinnen voor p en q kiezen. Deze argumenten zijn vooral gericht op de waarheidstabel. Meer algemene problemen, zoals het omdraaien van implicaties, behandel ik hier niet.

- **Denk aan hoe je een implicatie ontkracht** Stel dat iemand een 'als ..., dan ...' uitspraak doet en jij gaat er niet mee akkoord. Hoe kan je dan aantonen aan je gesprekspartner dat het niet klopt wat hij zegt? De enige mogelijkheid die je hierbij hebt, is om te tonen dat p waar is, en q niet waar. 'als p, dan q' zegt niets over het geval dat p niet waar is, en daarmee kan je dus ook deze uitspraak niet ontkrachten. Je gesprekspartner zou direct reageren met: "Ja, maar ik zei: 'ALS p'." Om die reden staat er dus enkel een 0 in de waarheidstabel van $p \Rightarrow q$ bij p waar en q niet waar.

- **Gedachtenexperimenten** Het is geen goed idee om $p \Rightarrow q$, bij p niet waar, als onwaar te definiëren. Hiermee zouden gedachtenexperimenten namelijk niet meer mogelijk zijn. Uitspraken als 'als de aarde plat is, dan zou ik nog steeds naar school gaan.' en 'als de aarde plat is, dan zou de aarde een rand hebben waar je af kan vallen.' zouden onwaar zijn. Gedachtenexperimenten worden echter vaak gebruikt. Denk bijvoorbeeld aan als je meer zakgeld wil krijgen van je ouders en je zegt: 'als ik 50 euro zakgeld per maand zou krijgen, dan zou ik genoeg geld hebben om meer uit eigen zak te betalen.' De aanname van deze uitspraak klopt eigenlijk (nog) niet, maar toch gaat iedere leerling hiermee akkoord.

- **Synchronisatie met andere connectieven in propositielogica** Het is hoofdzakelijk de waarheidstabel van de implicatie die problemen oplevert, in tegenstelling tot die van de andere connectieven. Dit kan handig gebruikt worden om de waarheidstabel van de implicatie op te bouwen aan de hand van de andere connectieven. Ik geef enkele voorbeelden. U kan dit klassikaal bespreken of de leerlingen zelf de waarheidstabellen laten vergelijken. Zo lijkt het bijvoorbeeld wenselijk dat als $p \vee q$ waar is, dat dan ook $\neg p \Rightarrow q$ waar is. U kan hierbij zelf een voorbeeld verzinnen. Dit geeft onderstaande waarheidstabel waarbij de gekleurde 1'tjes voortkomen uit onze eis.

p	q	p	$\vee$	q	$\neg$	p	$\Rightarrow$	q
0	0	0	0	0	1	0		0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1

Ook is het wenselijk dat *modus ponens* een geldige redeneervorm is. Modus ponens betekent dat je uit de aannames $p \Rightarrow q$ en p de uitspraak q mag afleiden. Als we willen dat modus ponens een geldige redeneervorm is, dan moet het zo zijn dat als de aannames $p \Rightarrow q$ en p waar zijn, dan ook q waar is. We kunnen deze redenering ook omdraaien via contrapositie: als q niet waar is, dan moet $p \Rightarrow q$ of p niet waar zijn. Hiermee ligt dus de onderstaande gekleurde 0 vast.

p	q	p	$\Rightarrow$	q	p	q
0	0	0		0	0	0
0	1	0		1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1		1	1	1

Bovenstaande waarheidstabellen geven dan uiteindelijk de waarheidstabel van $\Rightarrow$. Er zijn ook nog andere opties van waarheidstabellen die u kan vergelijken om tot de waarheidstabel van $\Rightarrow$ te komen. Zo kan u bijvoorbeeld eisen dat $p \Leftrightarrow q$ altijd dezelfde waarheidswaarde heeft als $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$ (als de waarheidstabel van $\Leftrightarrow$ aanvaard is.) Ook is de wet van contrapositie interessant om op te leggen aan de implicatie; dus dat $p \Rightarrow q$ altijd dezelfde waarheidswaarde moet hebben als $\neg q \Rightarrow \neg q$.

Deze interne verbanden kunnen dus gebruikt worden om de waarheidstabel aannemelijk te maken. Ik voeg hierbij toe: het wordt in de vakdidactische literatuur afgeraden om implicaties met een onware aanname te negeren. Men bespreekt best de volledige waarheidstabel, zonder het moeilijke punt van de onware aanname onder de mat te vegen. Er zijn verschillende problemen die zich kunnen voordoen bij het onvolledig bespreken. Ten eerste, als bij $p \Rightarrow q$ het geval met p onwaar genegeerd wordt, dan is $p \Rightarrow q$ niet te onderscheiden van $p \wedge q$ of van q. Wanneer leerlingen een zin in omgangstaal moeten omzetten naar symbolen, komt het dus voor dat ze $p \wedge q$ schrijven in plaats van $p \Rightarrow q$. Ten tweede heb je de volledige waarheidstabel nodig om contrapositie te staven aan de hand van de waarheidstabel. Contrapositie wordt veelvuldig gebruikt in de meetkunde.

- **Maar dat is onzin?**

  Een meer algemeen probleem met propositielogica is dat het enkel de waarheid van uitspraken bekijkt. In communicatie speelt er echter meer dan enkel de waarheid een rol. En dat probleem komt vooral naar boven bij $p \Rightarrow q$, omdat we intuïtief een inhoudelijk/oorzakelijk verband willen tussen p en q. Een uitspraak als 'Het regent of mijn haar is paars.' is vreemd, maar aanvaardbaar voor de leerlingen, terwijl 'Als het niet regent, dan is mijn haar paars.' meer reactie uitlokt. Er zijn enkele manieren om te reageren op de verwachting van een inhoudelijk/oorzakelijk verband bij $\Rightarrow$.

  Ten eerste is het een probleem van heel het systeem van de propositielogica. Bij alle andere connectieven kijken we ook enkel naar de waarheidswaarde van een uitspraak. Meer zelfs, 'logische uitspraak' wordt vaak gedefinieerd als een uitspraak waarvan je kan zeggen dat hij waar of vals is. Het systeem van de propositielogica is in zekere zin de gemakkelijkste manier om het redeneren te onderzoeken. Je zou het kunnen verbeteren, en beter laten aansluiten op de alledaagse manier van redeneren, maar verderop in het derde punt zien we dat de eenvoudigheid ook voordelen heeft.

  Ten tweede is een inhoudelijk/oorzakelijk verband tussen p en q eigenlijk een moeilijk ding. Om te oordelen of er een verband is of niet, moet je gebruik maken van je achtergrondkennis. Bijvoorbeeld bij 'als het regent, dan valt er water op de straat.' is gemakkelijk aanvaardbaar, omdat we weten wat het betekent om te regenen en omdat we weten dat de regen overal valt, zowel op als naast de straat. Er zijn echter uitspraken met een 'als ..., dan ...' en een inhoudelijk verband, die toch heel vreemd kunnen klinken. Ik geef enkele wiskundige voorbeelden: 'als n een Fermat priemgetal is, dan is de regelmatige n-hoek construeerbaar met een passer en liniaal (zonder markeringen op).', 'als de som van de kwadraten van twee zijden in een driehoek gelijk is aan het kwadraat van de derde zijde, dan is die driehoek rechthoekig.' en 'als je twee even getallen optelt, dan krijg je opnieuw een even getal.'. Deze voorbeelden lijken, afhankelijk van je voorkennis, geen inhoudelijk verband te bevatten. Zo zie je dus dat het niet zo eenvoudig is om het anders aan te pakken.

Ten derde is het soms net voordelig om enkel naar de waarheid van de uitspraken te kijken bij een implicatie. Als een specialist in het nieuws een moeilijke uitspraak doet in de vorm van $p \Rightarrow q$, dan begrijp je er misschien niet alles van, maar je weet wel dat als p waar is, dat q dan waar zal zijn. Zonder iets te weten over het vakgebied kan je zelfs redeneren dat als q niet waar is, dan p ook niet waar kan zijn. Ook in wiskunde is dit toepasbaar. Je kan redeneren over de voorbeelden die ik daarnet gaf, ook als je niet over de wiskundige voorkennis beschikt.

2.2 Pijnpunten

Zoals je waarschijnlijk zelf al merkte, gedraagt het connectief $\Rightarrow$ zich soms nogal vreemd. Je hebt de waarheidstabel wel gezien, en daarmee is de implicatie dus gedefinieerd, maar soms levert het vreemde situaties op. Zo is "Als de maan van kaas gemaakt is, dan is er geen paus." een ware uitspraak. Controleer zelf dat dit klopt.

In deze oefening ga je zelf op verkenning welke vreemde eigenschappen het connectief $\Rightarrow$ binnen de propositielogica heeft. Noteer je antwoorden op een apart blad.

1. De eerste eigenschap die we bekijken is de uitspraak $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.
   (a) Controleer met een waarheidstabel dat deze uitspraak altijd waar is.
   (b) Neem $p =$"Ik eet graag brownies." en $q =$"Ik ben goed in wiskunde.". Wat betekent $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ dan?
   (c) Neem $p =$"Er zijn veel natuurlijke getallen." en $q =$"Er is wereldvrede.". Wat betekent $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ dan?
   (d) Kan je formuleren wat er vreemd is aan $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$? *Tip:* Je uitleg kan starten met 'Als je twee willekeurige uitspraken p en q hebt, die mogelijk niets met elkaar te maken hebben, dan ...'.
2. De tweede eigenschap die we bekijken is de uitspraak $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
   (a) Controleer dat deze uitspraak altijd waar is.
   (b) Kies voor p een uitspraak waarvan je weet dat hij waar is, zoals "De aarde is rond." Kies $q =$"Het regent.". Wat betekent $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ dan?
   (c) Houd dezelfde uitspraak voor p. Kies voor q nog een andere uitspraak. Wat betekent $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ dan?
   (d) Kan je formuleren wat er vreemd is aan $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$? *Tip:* Je uitleg kan starten met 'Als je een ware uitspraak p hebt, dan wordt die geïmpliceerd door ...'.
3. De laatste eigenschap die we bekijken is de uitspraak $(q \wedge \neg q) \Rightarrow p$.
   (a) Controleer dat deze uitspraak altijd waar is.

(b) We zullen opnieuw enkele uitspraken invullen om de gegeven uitspraak beter te verstaan. Neem voor p een uitspraak waarvan je heel graag zou willen dat die waar is. Bijvoorbeeld $p =$“Ik ben rijk.”. Kies vervolgens voor q enkele willekeurige uitspraken. Schrijf je keuze voor p en q telkens op en formuleer wat $(q \wedge \neg q) \Rightarrow p$ dan betekent.

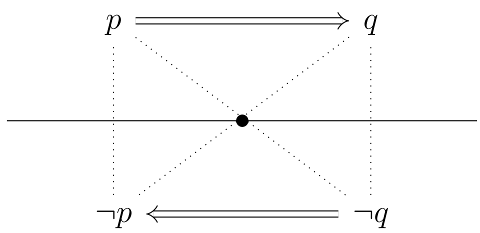
(c) Kan je formuleren wat er vreemd is aan $(q \wedge \neg q) \Rightarrow p$? Het kan handig zijn om te weten dat $(q \wedge \neg q)$ ook wel een *contradictie* genoemd wordt. De uitspraak $(q \wedge \neg q)$ is een contradictie omdat twee uitspraken elkaar tegenspreken (in dit geval q en $\neg q$).
Tip: Wat volgt er volgens de eigenschap uit een contradictie?

3 Visualisatie

In deze Sectie stel ik kort enkele mogelijkheden voor om visualisatie te gebruiken in propositielogica.

3.1 Vierkant voor Contrapositie

In vele handboeken worden de logische symbolen ingevoerd rond de stelling van Pythagoras. Daar, en in meetkunde in het algemeen, worden deze symbolen vaak gebruikt bij contrapositie. Contrapositie is een manipulatie van een implicatie, waarbij $p \Rightarrow q$ wordt omgevormd naar $\neg q \Rightarrow \neg p$. Deze twee uitspraken zijn equivalent. Dit “omkeren” van de implicatie kan voor verwarring zorgen, aangezien er ook veel aandacht gaat naar het niet zo maar omdraaien van de implicatie. Hiervoor stel ik onderstaande kleine schema voor. Dit kan natuurlijk nog visueel prettiger uitgewerkt worden, met eventueel aparte kleuren voor p, q en voor $\Rightarrow$.



Figuur 1: In bovenstaand schema staat bovenaan $p \Rightarrow q$. Daarna is er een volle lijn, die een spiegel voorstelt en in het midden een bol om rond te spiegelen. Onderaan krijgen we de implicatie na contrapositie, namelijk $\neg p \Leftarrow \neg q$. De verticale stippellijnen geven het “spiegelen” van p en q weer. De diagonale stippellijnen het “spiegelen” van $\Rightarrow$.

In bovenstaande Figuur 1 wordt contrapositie voorgesteld als spiegeling van de originele implicatie $p \Rightarrow q$. Om contrapositie correct uit te voeren, moet je alles “spiegelen”. De propositieletters worden vervangen door hun negatie bij het spiegelen door de grote spiegel. Het symbool $\Rightarrow$ wordt rond het centrale punt gespiegeld en wordt zo $\Leftarrow$. Merk op dat dit, voor $\Rightarrow$, overeen komt met de realiteit: een getekende pijl zou bij de puntspiegeling effectief een $\Leftarrow$ geven. Deze Figure kan een hulpmiddel zijn om ten eerste het onderscheid te maken tussen contrapositie en simpelweg omdraaien van de implicatie. Ten tweede kan het ook als schema gebruikt worden op papier om de contrapositie van een gegeven uitspraak op te stellen. Daarvoor vul je simpelweg p en q in, en je kan gewoon de structuur volgen.

3.2 Waarheidsmatrices

Deze optie voor visualisatie komt voort uit mijn uitwerking bij de oefening in Subsectie 5.1. Bij het opstellen van een waarheidstabel wordt meestal een verticaal gefocuste Tabel gebruikt. Daarbij worden links alle combinaties van waarheidswaarden voor de propositieletters in rijen opgeschreven. Vervolgens wordt stap voor stap de waarheidswaarde van de logische uitspraak bepaald, zoals u hieronder kan zien.

p	q	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Deze methode is vooral handig als er veel (≥ 3) propositievariabelen of een ingewikkelde logische uitspraak in het spel zijn. Via deze methode kan je dat namelijk puur mechanisch oplossen door zoveel kolommen en rijen toe te voegen als je wil.
Ook het connectief $\wedge$ wordt klassiek gedefinieerd met zo'n waarheidstabel.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wanneer er sprake is van twee propositievariabelen en slechts een simpele logische uitspraak, kan het echter handig zijn om één van de propositievariabelen op een aparte dimensie te zetten. In plaats van alles verticaal uit te werken, staan dan bijvoorbeeld de waarheidswaarden van p in de meest linkse kolom, de waarheidswaarden van q in de bovenste rij, en in de andere cellen staat de uiteindelijke waarheidswaarde van de logische uitspraak. We krijgen dan de onderstaande *waarheidsmatrix* van $p \wedge q$.

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Voor de duidelijkheid duidde ik in bovenstaande waarheidsmatrix de waarheidswaarden van p aan met groen en die van q met rood. Voor $\wedge$ maakt dit niet zo veel uit, maar bij $\Rightarrow$ zal dat wel heel belangrijk zijn.

Het nadeel hiervan is natuurlijk dat er dan twee soorten “waarheidstabellen” gebruikt worden. Aparte terminologie kan hierbij al helpen. Ook is het mogelijk om deze notatie met de matrices pas na een tijd te introduceren. Het voordeel is echter dat we nu een matrix hebben van waarheidswaarden. We kunnen logische eigenschappen van $\wedge$ vertalen naar meer visuele eigenschappen van matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Er zijn namelijk volgende connecties zichtbaar.

- De logische ‘en’ is commutatief en dus is A symmetrisch rond de diagonaal.
- De waarheidstabel van $\neg(p \wedge q)$ verkrijg je door alle elementen van A te vervangen door hun negatie.
- De negatie nemen van het linkerargument van $\wedge$ (dus in de linkse kolom) komt overeen met het wisselen van de rijen in A. De negatie van het rechterargument van $\wedge$ wisselt de kolommen.

Al deze connecties samen zorgen ervoor dat je bijvoorbeeld een wet van De Morgan visueel kan inzien. We starten met A als de waarheidstabel van $p \wedge q$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{p \mapsto \neg p} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{q \mapsto \neg q} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We starten met de waarheidstabel van $\wedge$. Vervolgens wisselen we de rijen en de kolommen. Deze laatste matrix komt dus overeen met de waarheidsmatrix van $\neg p \wedge \neg q$. Die matrix herken je gemakkelijk als de negatie van de waarheidsmatrix B van $p \vee q$ waarbij dus $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dit toont de visuele mogelijkheden van deze waarheidsmatrices aan, en we gaan hier verder op in bij Subsectie 5.1.

4 Instap voor logica vertrekkend van omgangstaal

We zullen in dit stuk iets leren over “logica”. We zullen het hebben over hoe je kan “logisch redeneren”, hoe je een onomstotelijk argument kan geven, hoe je de waarheid achterhaalt van een uitspraak, . . . In de tweede graad zien jullie de beginselen van logica en zullen jullie analyseren of individuele uitspraken waar zijn of niet. Dit zal ook goed van pas komen wanneer we wiskundig moeten nadenken! In de derde graad zullen jullie langere argumenten of redeneringen bekijken.

Laat ons nu stap voor stap kennismaken met die “logica”.

4.1 Inleiding op logica

Kan jij “logisch” redeneren?
Wel, laat ons eens kijken. In de kadertjes hieronder vind je enkele discussies in die zouden kunnen voorkomen in de klas. Jij moet bij iedere discussie bepalen of je akkoord gaat of niet met Alice en waarom. We zullen dit vervolgens bespreken in een klasgesprek.

Tom:	Iedere gsm is eigenlijk een ICT hulpmiddel.
Karel:	En sommige ICT hulpmiddelen zijn nuttig voor de les, zoals bijvoorbeeld een smartboard.
Alice:	Dus, iedere gsm is nuttig voor de les!

Tom:	Elke score van tijdens het jaar staat op je rapport.
Karel:	Sommige punten op je rapport zijn slecht.
Alice:	Oei, dus elke score tijdens het jaar is slecht!

Tom: Alles wat je kan dragen, staat vermeld in de dresscode van de school.

Karel: Je kan op carnaval een kostuum van The Joker dragen.

Alice: Maar dan zeg je dat het kostuum van The Joker vermeld staat in de dresscode van de school?

Tom: Ieder vierkant is een rechthoek.

Karel: En □ is een vierkant.

Alice: Dus is □ een rechthoek.

Volgende vragen kunnen aan bod komen in het klasgesprek. Jullie leerkracht heeft misschien nog andere vragen voor jullie.

1. Overloop met de klas bij elke discussie wie akkoord gaat met Alice.

2. Beargumenteer ook telkens waarom je wel of niet akkoord gaat.
   Kies per kadertje iemand uit de klas die er wel akkoord mee is, en iemand die er niet akkoord mee is, en laat ze voor de klas elkaar overtuigen van hun mening.

3. Zijn er leerlingen die bij bepaalde kadertjes niet akkoord gaan met Alice met als reden dat Tom of Karel iets fouts zei?
   Zijn er dus mensen die van mening zouden veranderen, als je moet aannemen dat alles wat Tom en Karel zeggen waar is?

4. Zijn er discussies die op elkaar lijken?
   In welke zin "lijken" ze op elkaar?

Vermoedelijk was er wel enige discussie over wanneer Alice nu correct was, en wanneer niet. Logica is de studie van het correct redeneren en dus komt dat mooi uit! We zullen de conflicten uit de weg kunnen ruimen.

4.2 Implicatie

In de eerste graad gebruikten jullie al de symbolen $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$.

Vraag 1. Kunnen jullie nog uitleggen wat deze symbolen betekenen? Wat heeft het woord 'implicatie' daarmee te maken?

Er staan enkele uitspraken in een kadertje voor je klaar. Neem even een kijkje.

> Als het regent, dan worden de straten nat.

> Als het zomervakantie is, en enkel dan, ga ik op reis.

> Als een vlakke figuur vier gelijke zijden heeft, dan is ze een vierkant.

Bespreek even in de klas met welke uitspraken je akkoord gaat.

Bekijk daarna onderstaande uitspraken. Betekenen ze hetzelfde als de uitspraken hierboven?

> Als de straten nat worden, dan regent het.

> Als ik op reis ga, en enkel dan, dan is het zomervakantie.

> Als een vlakke figuur een vierkant is, dan heeft ze vier gelijke zijden.

Daarnet ging je waarschijnlijk niet met alle uitspraken akkoord. Dat betekende dus dat je dacht dat niet al die uitspraken met een "als ..., dan ..."-constructie waar waren. Laat ons enkele voorbeelden bekijken om te achterhalen wanneer zulke uitspraken waar zijn.

> Als een rechthoek vier gelijke zijden heeft, dan is het een vierkant.

> Als je de plantjes iedere dag water geeft, dan zullen ze blijven leven.

> Als ik miljardair was, dan zou ik een heel groot huis kopen.

> Als het regent, dan bliksemt het.

> Wanneer ik met pensioen ben, dan zal ik regelmatig sporten.

> Als de koffiezetmachine niet was uitgevonden, dan zou de webcam veel later uitgevonden zijn.

Overleg opnieuw in de klas welke uitspraken kloppen en welke niet.

Vraag 2. Laat het ons vervolgens ietsje wiskundiger aanpakken om te achterhalen wanneer bovenstaande zinnen waar zijn. We zullen daarom letters gebruiken om uitspraken voor te stellen. Zo kunnen we bijvoorbeeld $p =$"Het regent." en $q =$"Het bliksemt." gebruiken. De vierde uitspraak hierboven ziet er in symbolen dan dus uit als $p \Rightarrow q$. Zie je in waarom? Wat betekende het symbool $\Rightarrow$ weer?

Vraag 3. Zie je een gelijkenis tussen de uitspraken?
We hebben nu al één uitspraak symbolisch geschreven als $p \Rightarrow q$, maar kun je dit ook doen voor de andere uitspraken (weliswaar met andere betekenissen van p en q)?

Vraag 4. Bekijk nu even de Tabel verderop. We kijken niet meer naar de concrete betekenis van de letters p of q, maar enkel naar of ze waar zijn of niet. Er staat een uitspraak per kolom. Een 0 staat voor het vals zijn van de uitspraak, en een 1 voor het waar zijn van de uitspraak. Staan in de Tabel alle mogelijke gevallen voor de waarheid van p en q?

Vraag 5. Overleg in de klas hoe je de Tabel zou invullen. In de laatste kolom moet er dus op iedere rij een 0 of een 1 komen die weergeeft of $p \Rightarrow q$ in dat geval waar of vals is. Bekijk opnieuw de voorbeelden om een keuze te maken.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

4.3 Negatie

We gaan verder op onze tocht in de logica. We zijn nu gekomen bij de 'negatie'; dat is de naam in de logica voor zinnen met een "niet" in. Bijvoorbeeld: de negatie van "Het regent." is "Het regent niet.". We noteren de "niet" met $\neg$. Dus als "Het regent." voorgesteld wordt met p, dan noteren we $\neg p$ voor "Het regent niet."

We zullen opnieuw kijken wanneer uitspraken met een "niet" waar of vals zijn. Dat lijkt op het eerste zicht eenvoudig, maar kijk maar eens naar volgende gesprekken!

Tom: Heb je zout in de soep gedaan?

Alice: Ja!

Tom: Heb je geen zout in de soep gedaan?

Alice: Ja!

Tom: Is 10 niet deelbaar door 3?

Alice: Ja!

Vraag 1. Merk je gelijkenissen op tussen de gesprekken? Welke? Denk ook aan gelijkenissen qua structuur, en niet enkel over de inhoud.

Is er iets verwarrends aan de reactie van Alice? Is het verwarrend dat ze bij de eerste twee gesprekken telkens "Ja!" antwoordt? Overleg hierover met de klas.

Vraag 2. Om verwarring bij wiskundig denken te vermijden, en om zeker te zijn dat we correct redeneren, hebben we duidelijkheid nodig over wanneer een uitspraak met "niet" nu waar is of niet. Vul daarom onderstaande Tabel in.

p	$\neg p$
0	
1	

4.4 Disjunctie

We vervolgen ons onderzoek in de logica. ‘Disjunctie’ is een moeilijk woord uit de logica voor een uitspraak met een “of” in. Je krijgt hieronder enkele gesprekken waar er telkens een “of” gebruikt wordt. Het is aan jou om te beslissen bij ieder gesprek of je akkoord gaat met de conclusie van Alice. **Neem aan dat de andere uitspraken in het gesprek zeker kloppen. Het gaat enkel over de conclusie van Alice.**

Alice:	Heb je al gehoord van de punten van Karel? Hij heeft heel goeie punten voor zijn examen. Hij heeft dus goed gestudeerd of gemakkelijke vragen gekregen.
Tom:	Ik had hetzelfde examen! Het waren heel gemakkelijke vragen.
Alice:	Ow! Karel zal dus wel niet goed gestudeerd hebben.

Alice:	Ik moet een cadeau van €5 kopen voor Karel. Ik zal snoep voor €5 of een cadeaukaart van €5 van bol.com kopen, maar ik weet nog niet welk van beide.
Tom:	Karel zou zeker blij zijn met snoep voor €5!
Alice:	Okay! Dan zal ik geen cadeaukaart kopen.

Alice:	Weet jij nog welke vlakke figuren vier rechte hoeken hebben?
Tom:	Als een figuur vier rechte hoeken heeft, dan is ze een vierkant of rechthoek.
Alice:	Okay! Dus als het een vierkant is, dan is het geen rechthoek.

Overleg in de klas over de verschillende gesprekken. Er zijn twee vragen die jullie moeten beantwoorden.

1. Er zijn gelijkenissen tussen de gesprekken. Welke? Denk aan gelijkenissen qua structuur, en let op de “of”.

2. Waarom gaan jullie soms wel en soms niet akkoord met Alice?

Je merkte tijdens het klasgesprek waarschijnlijk op dat een “of” eigenlijk niet zo eenduidig is. Als we willen communiceren in wiskunde, willen we echter geen misverstanden of onduidelijkheden hebben. We gebruiken dus het symbool $\vee$ voor de “of” in de wiskunde, en we gebruiken onderstaande waarheidstabel. Die noemen we de inclusieve “of”.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vraag 1. Naast de inclusieve “of” heb je ook de exclusieve “of”. Bij de exclusieve “of” mogen de twee delen apart waar zijn, maar niet allebei. Kan je zeggen bij welke gesprekken hierboven de inclusieve “of”, dan wel de exclusieve “of” gebruikt wordt?

4.5 Conjunctie

Als we spreken over de “of”, dan moeten we het ook hebben over de “en”. Een zin met “en” noemen logici een ‘conjunctie’ en daarvoor gebruiken ze het symbool $\wedge$. Laat ons een voorbeeld bekijken. Wanneer heeft Karel in onderstaand gesprek gelijk?

Tom: Alice en ik zijn slim.

Karel: Dat is niet waar!

Meer specifiek, bij welk van de twee onderstaande uitspraken heeft Karel gelijk? Overleg hierover in de klas.

Tom is niet slim en Alice is niet slim.

Tom is niet slim of Alice is niet slim.

Vraag 1. Laat ons nu invullen in een waarheidstabel wanneer een zin met een “en” niet waar is. Op die plaatsen moet dus een 0 staan. Dan weten we ook meteen dat bij de andere gevallen de zin wel waar is, en er dus een 1 moet staan.

p	q	$p \wedge q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

4.6 Kwantoren

Het laatste logische concept dat we bekijken, zijn kwantoren. Er zijn hieronder opnieuw enkele gesprekken. In welke gesprekken vind je de reactie van Alice begrijpbaar? Waarom wel/niet?
Overleg met de klas.

Tom:	O nee! Alle tickets zijn al uitverkocht!
Alice:	Ik zal toch nog eens proberen of ik één vind.

Karel:	Ik ben net gaan kijken en alle plaatsen in de bib zijn bezet.
Alice:	Ik zal nog eens kijken voor de zekerheid.

Karel:	We hebben in wiskunde bewezen dat bij alle driehoeken de som van de hoeken gelijk is aan 180°.
Alice:	Ik zal toch nog eens op zoek gaan naar een driehoek waar dat niet zo is.

Vraag 1. In wiskunde gebruiken we het symbool $\forall$ bij een uitspraak met "(voor) alle" of "iedere". Zoals je daarnet merkte wordt dit anders gebruikt in de omgangstaal. Kunnen jullie uitleggen wat het verschil is?

Vraag 2. Stel dat we nu volgende uitspraak met "alle" bekijken.

Alle priemgetallen zijn oneven.

Hoe zou je aantonen dat deze uitspraak **niet** klopt?

Een ander symbool dat in wiskunde gebruikt wordt is $\exists$. Dit symbool betekent "er is/zijn" of "sommige". Hou dus goed in het achterhoofd dat $\exists$ al tevreden is van zodra er **één** geval is waar de uitspraak klopt. Als ik zeg "Er zijn natuurlijke getallen kleiner dan 1.", dan is één voorbeeld (bijvoorbeeld het getal 0) voldoende om die uitspraak waar te maken.

5 Verdiepingsoefeningen

5.1 True, False of “Unknown”? Voorbij de propositielogica

De wet van de uitgesloten derde zegt dat een uitspraak p ofwel waar ofwel niet waar is ($p \vee \neg p$). Er zijn echter contexten denkbaar waar die wet niet geldt. Denk maar aan bijvoorbeeld subjectieve uitspraken als “Wiskunde is leuk!” of uitspraken waarvan het niet geweten is of ze waar zijn of niet zoals “Op 5 januari 2083 zal het regenen.”. In propositielogica worden deze uitspraken niet beschouwd als ‘logische uitspraak’. Stel dat we echter onze logicataal zouden uitbreiden met een derde mogelijkheid voor de waarheidswaarde zoals “nog niet geweten” of “niet te bepalen”, dan zouden we meer uitspraken kunnen analyseren. Hoe zouden onze klassieke logische connectieven er dan uit zien? Dit brengt ons tot de zogenaamde driewaardige logica.

In dit gedeelte gebruiken we de notatie T van ‘True’ voor waar, F van ‘False’ voor vals en U van ‘Unknown’ voor onbepaald. Dit doen we om echt duidelijk te maken dat het over een verschillende logicataal gaat. Voor de definitie van de logische connectieven zullen we ervoor zorgen dat ze zich met de waarden T en F net zoals vroeger gedragen. Het is enkel als er een U in het spel is, dat we iets nieuws zullen moeten bedenken. De negatie van U moet opnieuw U zijn. Als je namelijk niet weet of een uitspraak waar of vals is, dan weet je ook niets over de negatie van die uitspraak. Samengenomen, wordt de logische negatie dus als volgt gedefinieerd:

p	$\neg p$
T	F
U	U
F	T

Vraag 1. In deze oefening zullen we vervolgens voor de andere logische connectieven ($\wedge$, $\vee$ en $\Rightarrow$) op zoek gaan naar een goede definitie. Aangezien we nu een extra waarheidswaarde U hebben, zijn er meer mogelijkheden voor de waarheidswaarden van twee uitspraken. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Aangezien het meer mogelijkheden zijn, zullen we ze overzichtelijker weergeven dan in de normale waarheidstabel. In plaats van alle mogelijke waarheidswaarden rij per rij op te schrijven, zullen we nu ook de kolommen gebruiken. Bij het definiëren van bijvoorbeeld de $p \wedge q$ zetten we de mogelijke waarheidswaarden van p in de linkse kolom en de mogelijke waarden van q in de bovenste rij. De andere cellen horen dan bij alle mogelijke combinaties. De waarde van $F \wedge U$ in onderstaande Tabel zal bijvoorbeeld in de vierde rij en derde kolom komen. Deze voorstelling noemen we geen waarheidstabel, maar een *waarheidsmatrix*.

$\wedge$	T	U	F
T			
U			
F			

Conjunctie

We zullen nu ook de $\wedge$ definiëren.

We willen dat de conjunctie zich gedraagt als vroeger voor uitspraken die T of F zijn. Je kunt dus al de cellen aanvullen waar er geen sprake is van U.

$\wedge$	T	U	F
T			
U			
F			

Vraag 2. Laat ons nu opnieuw intuïtief nadenken zoals daarnet bij de waarheidsmatrix van de negatie. Herinner je, de waarde U betekent "Unknown"; je weet niet of de uitspraak waar of vals is. Vul nu de rest van de waarheidsmatrix van $\wedge$ in en beargumenteer.

Disjunctie

1. Definieer de $\vee$ zoals daarnet bij de $\wedge$. Maak opnieuw gebruik van de betekenis van U als "Unknown" om de waarheidsmatrix op te stellen.

2. Verifieer dat de wet van De Morgan nog altijd geldt. Controleer dus dat $p \vee q$ altijd dezelfde waarheidswaarde heeft als $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ bij drie mogelijke waarheidswaarden (T,U,F).

$\vee$	T	U	F
T			
U			
F			

Implicatie

Om $\Rightarrow$ te definiëren zou je opnieuw kunnen intuïtief redeneren op de betekenis van U zoals je gedaan hebt bij de vorige connectieven. Bij de $\vee$ controleerden we dan achteraf of een logische wet nog steeds klopte voor onze definitie. We draaien nu de volgorde om: in plaats van eerst intuïtief te redeneren en vervolgens een wet te verifiëren, zullen we de $\Rightarrow$ rechtstreeks definiëren door een logische wet.

Vraag 3. In propositielogica is er een logische wet die zegt dat $p \Rightarrow q$ altijd dezelfde waarheidswaarde als $\neg p \vee q$. Stel dus een waarheidsmatrix van $\neg p \vee q$ op en definieer daarmee de $\Rightarrow$ zodat aan die wet voldaan is.

$\Rightarrow$	T	U	F
T			
U			
F			

Praktische toepassing

Ik werk een voorbeeld uit waar deze logica met drie waarheidswaarden (T, U en F) belangrijk is.

Stel dat je een analyse doet over de werkzaamheid van een bepaald medicijn. Tijdens je onderzoek wil je specifiek bekijken hoe de medicatie werkt op rokers. Aangezien het een onderzoek is op lange termijn, kan het echter zijn dat sommige deelnemers overlijden tijdens het onderzoek. Je wilt dus je dataset filteren tot bijvoorbeeld alle rokers die niet gestorven zijn. De programmeertaal die je daarvoor gebruikt, zal kijken welke mensen in de steekproef de uitspraak "de persoon rookt $\wedge\neg$ de persoon is gestorven" waar maken. Daarbij kunnen we dus $p =$"de persoon rookt" en $q =$"de persoon is gestorven" nemen. Hoewel zowel p op q op het eerste zicht waar of vals lijken, is er in de praktijk nog een derde mogelijkheid. Die derde mogelijkheid is dat je het niet weet! Vele datasets zijn namelijk niet volledig, en er zal op verschillende plaatsen dan "NA" (van "Not Available") te vinden zijn. Dit komt overeen met onze U. Dit kan bijvoorbeeld voorkomen als je een dataset hebt die opgesteld is in verschillende landen, waarbij één land wel registreerde wie er rookte (dan staat er T of F voor p), maar een ander land niet (en die mensen dus U zullen hebben voor p).

Vraag 4. Stel dat enkel de personen uit de dataset worden meegenomen die $p \wedge \neg q$ waar maken (dus waarheidswaarde T). Worden in dat geval mensen van wie niet geweten is of ze roken meegenomen in de dataset of niet? Kijk hiervoor naar de definitie van $\wedge$ van daarnet!

5.2 Identieke operaties

In deze oefening gaan we op zoek naar operaties die eigenlijk niets doen. Wat bedoelen we hiermee? Ik geef een voorbeeld. Je start met p. Vervolgens zetten we daar $\neg\neg$ voor (dit is onze operatie). We krijgen de uitspraak $\neg\neg p$. In een waarheidstabel kunnen we dan controleren dat deze nieuwe uitspraak altijd dezelfde waarde heeft als p (dus of de operatie "identiek" is).

p	$\neg$	$\neg$	p
0	0	1	0
1	1	0	1

Dit klopt dus effectief! De uitspraak $\neg\neg p$ heeft altijd dezelfde waarheidswaarde als p, en dus is $\neg\neg$ voor een uitspraak zetten een voorbeeld van een identieke operatie. In het algemeen start een identieke operatie met een uitspraak p, wordt er vervolgens iets met die p gedaan (de zogenaamde *operatie*) en krijgen we een uitspraak terug die altijd dezelfde waarheidswaarde heeft als p (hij is dus in zekere zin *identiek* met p).

1. We starten met p en de operatie die we uitvoeren is er $(q \Rightarrow q) \wedge$ voor zetten. We krijgen na deze operatie dus $(q \Rightarrow q) \wedge p$ als uitspraak. Ga na of dit een identieke operatie is.
   Tip: Kijk naar het voorbeeld hierboven.

2. We starten met p en de operatie die we uitvoeren is er $(q \vee \neg q) \wedge$ voor zetten. We krijgen dus $(q \vee \neg q) \wedge p$. Ga na of dit een identieke operatie is.

3. We voeren een nieuw symbool in: $\top$ wordt gebruikt voor een uitspraak die altijd waar is. Het doet er dus niet toe of en welke propositieletters in die uitspraak zitten; het enige belangrijke is dat $\top$ altijd waar is (in het groen). De waarheidstabel van $\top \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ is dan bijvoorbeeld:

q	r	$\top$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Kijk naar de vorige twee vragen: denk je dat $\top\wedge$ voor een uitspraak zetten een identieke operatie is? Beargumenteer met een waarheidstabel.

4. Het symbool $\top$ is voor een uitspraak die altijd waar is. Het symbool $\bot$ wordt gebruikt voor een uitspraak die altijd vals is. Opnieuw: het doet er niet toe of en welke propositieletters in die uitspraak zitten: $\bot$ is altijd onwaar.
   Denk je dat $\bot\vee$ voor een uitspraak zetten een identieke operatie is? Beargumenteer!

5.3 Connectieven uitdrukken met andere connectieven

In deze oefening vragen we ons af of bepaalde connectieven kunnen uitgedrukt worden met andere connectieven. Laat ons starten met een voorbeeld.

In je cursus logica zag je misschien de exclusieve "of" en voerde je daar een apart symbool voor in. Hier gebruiken we het symbool $\otimes$ voor de exclusieve "of". Voor leerlingen die dit nog niet gezien hebben, voeg ik hieronder de waarheidstabel toe van $\otimes$.

p	q	$p \otimes q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

De exclusieve "of" is dus waar als een van de twee delen waar is, maar niet beide.
Welnu, de exclusieve of $\otimes$ kan uitgedrukt worden met andere connectieven! De uitspraak $p \otimes q$ betekent dat p of q waar is, maar niet beiden tegelijk. We kunnen dat laatste letterlijk vertalen in $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$. In een waarheidstabel controleren we dat deze uitspraken altijd dezelfde waarheidswaarde hebben.

p	q	p	$\otimes$	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1

Dat klopt! We kunnen dus $\otimes$ uitdrukken met de gekende symbolen $\vee, \neg$ en $\wedge$, omdat we een uitspraak vonden met enkel $\vee, \neg$ of $\wedge$ die altijd dezelfde waarheidswaarde heeft als $p \otimes q$. De volgende vraag is natuurlijk of je ook andere connectieven kan uitdrukken met $\neg, \vee$ en $\wedge$.

1. Je kan $\Rightarrow$ uitdrukken aan de hand van $\neg$ en $\vee$. De uitspraak $p \Rightarrow q$ heeft namelijk altijd dezelfde waarheidswaarde als $\neg p \vee q$. Controleer dit met een waarheidstabel.

2. Omgekeerd is er echter ook een verband. Je kan $\vee$ uitdrukken met $\Rightarrow$. De uitspraak $p \vee q$ heeft namelijk altijd dezelfde waarheidswaarde als $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$. Controleer dit met een waarheidstabel.

3. Kan je een manier bedenken om de $\vee$ uit te drukken met $\neg$ en $\wedge$?
   Tip: Denk aan de wetten van De Morgan.

4. We hebben nu al allerhande verbanden gevonden. De $\Rightarrow$ kunnen we uitdrukken met de $\neg$ en de $\vee$, en de $\vee$ kunnen we uitdrukken met de $\neg$ en de $\wedge$. We kunnen dus eigenlijk elk connectief dat je kent uitdrukken met $\neg$ en $\wedge$! Dat is al indrukwekkend, aangezien we dat kunnen doen met slechts twee connectieven. Zou het ook lukken met één connectief?

   Het antwoord is ja! De zogenaamde 'Sheffer Stroke' met als symbool $|$ kan ieder ander connectief uitdrukken. Dit is de waarheidstabel van $|$:

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Je kan zien dat $p \mid q$ eigenlijk de negatie is van $p \wedge q$.
   Kan je een manier bedenken om $\neg$ uit te drukken met $|$?

5. Kan je een manier bedenken om $p \wedge q$ uit te drukken met $|$?

6 Begeleidende Tekst voor Leerkrachten

In deze Sectie geef ik meer uitleg bij de vorige delen. Het gaat hierbij voornamelijk om concreet didactisch advies om het lesmateriaal te gebruiken, en niet zo zeer over de theoretische achtergrond (waarvoor u mijn thesis kan lezen). Ik gebruik de zelfde structuur als hierboven. Doorheen het lesmateriaal merkte je waarschijnlijk dat er nogal veel witruimte is. Zo kunnen de delen apart gebruikt worden.

Sectie 1

Deze lijst met verschillen spreekt redelijk voor zich. Ze is opgesteld voor leerkrachten. Uit de vakdidactische literatuur blijkt dat veel moeilijkheden met de formele logica voortkomen uit verschillen met gewone omgangstaal. Ook in de eindtermen voor de tweede graad is het verschil met de omgangstaal (in beperkte mate) opgenomen. Onze volledigere lijst kan u gebruiken als persoonlijk hulpmiddel: u kan dus simpelweg de lijst lezen en u zo bewust zijn tijdens de lessen over logica wat mogelijke problemen kunnen zijn. Daarnaast kan deze lijst ook inspireren voor het maken van eigen lesmateriaal (zoals ik zelf heb geprobeerd in Sectie 4). Er zijn nog andere problemen met logica die niet onmiddellijk voortkomen uit verschillen met de omgangstaal. Deze zijn hier niet opgenomen.

Sectie 2

Deze Sectie bestaat uit twee delen. Het eerste deel is geschreven voor leerkrachten en bevat een lijst van argumentaties voor de waarheidstabel van de implicatie, zonder twijfel het moeilijkste connectief. Dit toont zich bijvoorbeeld in problemen met het verschil tussen equivalentie en implicatie, of problemen met omkeren van de implicatie. Daarenboven kunnen er ook problemen optreden bij het aanleren van de waarheidstabel van $\Rightarrow$. Die problemen kunnen verstaan worden als het niet begrijpen van de waarheidstabel, maar ook als het niet aanvaarden van die waarheidstabel. De lijst argumenten gaat eerder uit van die tweede optie, en probeert de gegeven Tabel aannemelijker te maken. Het kan dus nuttig zijn om deze opgelijste argumenten in het achterhoofd te houden, wanneer u hierover les geeft.

In het tweede deel is er een oefening die geschreven is voor leerlingen. Het heeft ook een oplossingsleutel in Subsectie 7. Dit is een moeilijkere oefening voor leerlingen die verdieping willen. Het is geen verplichte leerstof. In deze oefening gaan leerlingen zelf op onderzoek (met begeleiding) welke vreemde eigenschappen de implicatie in propositielogica heeft. Er zijn drie eigenschappen, die quasi geordend zijn volgens moeilijkheidsgraad/ondersteuning. U kan deze oefening zelfstandig laten oplossen, maar ik vermoed dat er wel een beetje ondersteuning van de leerkracht nodig zal zijn. Wat de leerkracht ook in de gaten zal moeten houden bij deze oefening, is de attitudinale reactie op de materie. Het is vanuit wiskundig perspectief heel interessant, maar kan ook een reactie te weeg brengen als “Logica klopt niet.”. In dat geval kan u bijvoorbeeld deze kadering geven: “Deze oefening betekent niet dat alles van wiskunde en logica om zeep is. Het betekent enkel dat propositielogica een vrij simpel **model** is van hoe wij wiskundig denken. Er zijn ook meer uitgebreide systemen (zoals predicatenlogica) die dichter proberen aan te leunen bij onze gewone manier van redeneren.”

Sectie 3

Deze volledige Sectie is geschreven voor leerkrachten. In mijn thesis bespreek ik enkele mogelijkheden om visualisatie te gebruiken bij het aanleren van logica. Daaruit bleek dat visualisatie, althans van de logische structuur en niet van de inhoud, effectief kan helpen. In Sectie 3 geef ik daarom twee suggesties voor het gebruik van visualisatie. Ten eerste is er een visueel schema voor contrapositie gebaseerd op spiegelen. Het “invullen” van dit schema (met specifieke p en q) kan leerlingen een houvast bieden om geen fouten te maken bij de contrapositie nemen van een uitspraak. Daarnaast kan het ook nuttig zijn om conceptueel het verschil tussen contrapositie en omkeren van de implicatie te onthouden. Dit schema lijkt me geschikt voor alle leerlingengroepen.

Ten tweede introduceer ik een andere soort waarheidstabellen, die ik ‘waarheidsmatrices’ noem. Dit lijkt me eerder iets voor de wiskundig sterkere groepen (aangezien ze waarheidstabellen en waarheidsmatrices goed uit elkaar zullen moeten houden). Het linkt matrixmanipulaties aan eigenschappen van logische connectieven, wat een verrassend en interessant verband is.

Sectie 4

Deze Sectie verdient zonder twijfel de langste begeleidende tekst. In deze Sectie maakte ik een (beperkte) leerlingentekst om logica te introduceren. Hij is niet bedoeld als volledige cursus voor logica. Zo zal er bijvoorbeeld meer aandacht moeten zijn voor het invoeren van propositieletters en het idee van een waarheidstabel dan wat in dit lesmateriaal neergeschreven staat. Wel bevat het per logisch connectief (en één keer in het algemeen voor “logica”) aantrekkelijke instappen. Deze zijn telkens gebaseerd op realistische redeneringen/uitspraken in de omgangstaal. De gedachte is dat in de plaats van logica te introduceren met toepassingen uit technologie of met artificiële, simpele uitspraken, het ook interessant is om te starten vanaf realistische redeneringen. De verschillen met de omgangstaal worden dus gebruikt vanaf de start, om het nut en de noodzaak van logica interactief te tonen, in plaats van een deductief systeem voor te stellen en achteraf op te merken dat het verschilt van de gewone omgangstaal. Dit is interessant voor iedere leerlingengroep, maar vooral voor richtingen die niet techologisch noch wiskundig georiënteerd zijn. Omdat er niet gestart wordt van simpele uitspraken, kan het ook wel iets moeilijker zijn voor de leerlingen, maar zal de start des te aangrijpender zijn. U kan als leerkracht zelf kiezen hoe u na deze start de overgang naar formalisatie maakt. Zo kan u na de realistische redeneringen eerst enkele simpelere uitspraken geven om de waarheidstabel op te stellen.

Per connectief zijn er enkele redeneringen die in een klasgesprek vergeleken moeten worden. De redeneringen zijn zo gekozen dat ze discussie te weeg zullen brengen, en die reactie kan dan gebruikt worden om de waarheidstabel van het connectief te introduceren. De redeneringen kunnen natuurlijk misschien nog beter gekozen worden. Ik nodig u uit om eventuele alternatieven te bedenken! Er is geen oplossingsleutel voorzien, aangezien het bedoeld is voor een klasgesprek dat u als leerkracht zal moeten begeleiden. U zal sowieso een beetje moeten sturen of gepaste vragen stellen. Daarover later meer in onderstaande Subsecties. Na de instap per connectief maken de leerlingen best enkele oefeningen met eenvoudigere uitspraken om het meer in de vingers te krijgen. Ik raad de voorgestelde volgorde van instappen/connectieven aan. Zo hangt de uitleg van conjunctie in Subsectie 4.5 sterk af van de voorgaande Subsectie 4.4 over disjunctie. Het is zeker mogelijk om slechts enkele van de voorgestelde instappen te gebruiken, of bijvoorbeeld instappen te combineren.

Subsectie 4.1

Deze Subsectie draait om vier redeneringen. Impliciet wordt het verschil tussen geldige en ongeldige redeneringen geïntroduceerd. Geldigheid als zelfstandig concept is geen deel van de eindtermen, en zeker niet voor de tweede graad, maar is wel zo fundamenteel voor logica dat het een ideaal inleidingsonderwerp is.

De twee eerste redeneringen zijn ongeldig, aangezien ze de structuur volgen van "alle A zijn B, sommige B zijn C, dus alle A zijn C.". De eerste redenering zal echter verleidelijk zijn om mee akkoord te gaan voor de leerlingen, en de tweede zeker niet. U kan de leerlingen dus tegen elkaar uitspelen door in vraag te stellen waarom ze wel met de ene, maar niet met de andere van deze twee redeneringen akkoord gaan.

De laatste twee redeneringen zijn geldig, en hebben een structuur als "alle A zijn B, deze specifieke C is A, dus deze specifieke C is B.". Daarvan is de eerste verleidelijk om niet akkoord mee te gaan, en de tweede wel.[1] Hier kan u leerlingen dus ook confronteren, als ze niet de zelfde keuze maken bij deze twee redeneringen. De vraag is of je akkoord gaat met Alice. Er zullen waarschijnlijk leerlingen zijn die niet akkoord gaan, door iets wat Tom of Karel zei. Dit kan echter aan bod komen tijdens het klasgesprek.

Naar het einde van het klasgesprek gaat het over "gelijkenissen" tussen de redeneringen. Een optie hiervoor is dat sommige redeneringen dezelfde logische structuur hebben. Daarnaast kan je het ook algemener hebben over geldigheid van redeneringen. U kan als leerkracht zelf kiezen hoeveel u hierbij zelf opbrengt. Een mogelijke uitleg is: "De twee eerste redeneringen lijken op elkaar, omdat ze *ongeldig* zijn. Zelfs al ga je akkoord met alle aannames van Tom en Karel, dan kan het nog steeds zijn dat wat Alice zegt, niet klopt. Bij de twee laatste is het anders. Als je akkoord gaat met de aannames, dan **moet** je wel akkoord gaan met de conclusie van Alice. Deze twee redeneringen noemen we dus *geldig*. Je kan dus geldig redeneren, zonder te weten wat waar is en wat niet. Dit is de kracht van de logica: je kan van een redenering zeggen dat ze geldig is of niet, zelfs al weet je niet wat er waar is of niet. In wiskunde willen we enkel geldig redeneren. Daarom gaan we nu verder met onze studie van de logica."

Subsectie 4.2

De Subsectie over de implicatie start met een herhaling van de eerste graad. Er worden enkele voorbeelden opnieuw in een klasgesprek besproken, waarna gecontroleerd wordt wanneer je de uitspraken mag 'omdraaien'. Vervolgens zijn er nog enkele voorbeelden die gericht zijn op het opstellen van de waarheidstabel. Er zijn doelbewust ook enkele moeilijkere uitspraken. Deze dienen als voorbeeld bij de eigenschap dat de implicatie waar is, als de aanname vals is. Er is ook één voorbeeld (over een koffiezetmachine) dat de leerlingen

[1] Toegegeven, bij die eerste redenering zit er nog een extra addertje in het gras: "kan" wordt eigenlijk in twee betekenissen gebruikt zodat de leerlingen de aannames vlotter aanvaarden. Technisch gezien is die eerste redenering dus een drogredenering met equivocatie.

doelbewust op het verkeerde spoor brengt, en gelinkt is aan mijn uitleg over 'verband' in Subsectie 2.1. Er hoeft geen **inhoudelijk** verband te zijn tussen de twee uitspraken die verbonden worden door $\Rightarrow$. Bij de uitspraak over de koffiezetmachine lijkt er totaal geen inhoudelijk verband te zijn, maar online op deze site kan u nalezen dat er eigenlijk wel een verband is. Dit maakt duidelijk dat 'verband' of 'relevantie' moeilijk is om op voorhand te zeggen, en we dus enkel naar de waarheid kijken van de deeluitspraken.

In dit stuk worden propositieletters en waarheidstabellen vrij snel ingevoerd in vergelijking met de snelheid van de rest van de instap. Het is echter een belangrijk stuk om verder te kunnen. Hier zal u dus misschien extra ondersteuning/materiaal moeten voor voorzien. Op het einde benadrukt u ook best nog eens de waarheidstabel van $\Rightarrow$, aangezien die soms moeilijk aanvaard wordt door de leerlingen. Denk bijvoorbeeld aan het feit dat $p \Rightarrow q$ altijd waar is, als p onwaar is. Argumenten om die waarheidstabel aannemelijker te maken kan u vinden in Subsectie 2.1.

Subsectie 4.3

In deze Subsectie gebruiken we negatieve vragen als startpunt. Deze kunnen namelijk, zelfs in de omgangstaal, voor onduidelijkheid zorgen en zijn dus een goeie aanleiding voor formalisering. Het voorbeeld van "Is 10 niet deelbaar door 3" lijkt misschien uit de lucht gegrepen, maar denk aan (wat de leerlingen nog zullen zien) "Is $\sqrt{2}$ irrationaal?" en "Is $\sqrt{2}$ niet rationaal?". Deze twee laatste vragen zien er logisch equivalent uit, en je zou dus ook hetzelfde antwoord erop verwachten.

Er waren ook andere ideeën om de nood van formalisatie van de negatie te introduceren. Ik lijst ze hier ter inspiratie.

- Een Vals dilemma is een drogredenering waarbij twee alternatieven verkeerdelijk als exhaustief worden voorgesteld. Denk bijvoorbeeld aan "Je bent ofwel mijn vriend ofwel mijn vijand.". Dit staat in contrast met de logische wet $p \vee \neg p$ in propositielogica. Een tautologie zou dus kunnen zijn "Je bent mijn vriend of niet mijn vriend.". Het contrast tussen deze twee, afhankelijk van de situatie, kan aanleiding geven tot reflectie en formalisatie van de negatie.

- Naast negatieve vragen zijn ook uitspraken met dubbele negaties soms onduidelijk. Er zijn soms zelfs uitspraken met drie of vier negaties! Door enkele dergelijke uitspraken te vergelijken kan je ook de negatie invoeren.

- Het Engels heeft zogenaamde 'tag questions', waarbij op het einde van een uitspraak bijvoorbeeld nog een ",isn't it?" komt. Daarnaast heeft het Engels geen "jawel", wat in het Nederlands gebruikt wordt om eenduidig op negatieve vragen te beantwoorden. Het vergelijken van een Engels en Nederlands gesprek met negatieve vragen kan dus ook als startpunt ontwikkeld worden. In mijn opzoekingswerk zijn 'tag questions' in het Engels echter nog niet gekend door leerlingen uit de tweede graad, dus wees u bewust van uw doelpubliek bij deze optie.

Subsectie 4.4

De drie redeneringen zijn qua logische structuur alledrie equivalent. Ze gebruiken alledrie de redeneervorm $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow \neg q$. Die is ongeldig voor de inclusieve "of", maar geldig voor de exclusieve "of"! Bij de eerste en laatste redenering is er een inclusieve "of", bij de tweede een exclusieve. Na een klasgesprek over waarom ze soms wel en soms niet akkoord gaan met de redenering, draaien de leerlingen het blad om en vinden ze de waarheidstabel van de inclusieve "of". Ze moeten vervolgens nog eens nagaan bij welke redenering nu de inclusieve of exclusieve "of" gebruikt wordt.

Subsectie 4.5

Een moeilijkheid met de conjunctie, die ook kan voorkomen in de omgangstaal, is de negatie ervan nemen. Dit hebben we gekozen als basis van het bestudeerde gesprek. Merk op, dit stuk moet zeker na het behandelen van de "of" komen, aangezien hier de inclusieve "of" echt wel nodig is.
Denk bij dit deel voor de $\wedge$ ook aan het verschil met de omgangstaal over "en" tussen uitspraken en "en" tussen objecten. Dit staat uitgelegd in Sectie 1. Ik heb geprobeerd dit duidelijk te houden door zo snel mogelijk over te stappen op enkel een "en" tussen uitspraken.

Subsectie 4.6

We hebben meerdere opties overwogen om kwantoren in te leiden. Ik geef hier opnieuw de lijst om u misschien te inspireren.

- Je kan samen met de leerlingen 'proberen' om syllogismen te formaliseren met propositielogica. Dit zijn redeneervormen die gecategoriseerd zijn in een systeem van Aristoteles. Bij Subsectie 4.1 zijn bijvoorbeeld alle redeneringen syllogismen. Meer info kan u online over dit soort redeneringen vinden.

Het zal echter niet lukken om syllogismen te formaliseren, aangezien je een "voor alle" moet kunnen uitdrukken, wat niet lukt in propositielogica. Het is een activerende inleiding, maar vraagt wel extra ondersteuning aangezien het redelijk moeilijk is.

- In de omgangstaal wordt er losser omgesprongen met de volgorde van kwantoren. Dit komt voor in bijvoorbeeld spreekwoorden zoals "Op ieder potje past een dekseltje.". Door spreekwoorden met omgedraaide versies te vergelijken zou je kwantoren kunnen introduceren. Het is opnieuw een mogelijkheid om te vergelijken met spreekwoorden uit een andere taal, zoals Frans of Engels.
- Voor de geavanceerde studenten kan u de kwantoren invoeren als oneindige variant van de conjunctie en disjunctie. Een uitgewerkt voorbeeld vindt u hier.

Uiteindelijk viel de keuze op het verschil tussen $\forall$ wat slaat op **echt alle**, en "alle" wat in de omgangstaal vaak slaat op "de meeste". De reden is dat dit een erg belangrijk verschil is voor wiskundige bewijzen. Vervolgens wordt $\exists$ geïntroduceerd door het idee van een tegenvoorbeeld. Het was ook mogelijk geweest om die kwantor te introduceren met redeneringen waar "er zijn" soms "er is een redelijk deel" en soms "er is letterlijk minstens één" betekent. Dit zou dan gelijkaardig zijn aan de introductie van $\forall$, maar het geven van een tegenvoorbeeld is te belangrijk om niet aan bod te laten komen. Bij echt vergevorderde klassen zou u bij $\exists$ kunnen spreken over het verschil tussen constructieve en niet-constructieve existentiebewijzen. Bij constructieve bewijzen wordt een concreet geval geconstrueerd die de uitspraak met een $\exists$ waar maakt. Bij niet-constructieve wordt enkel aangetoond dat er een geval bestaat dat voldoet, maar wordt niet achterhaald wat het geval dan concreet is. Dit verschil kan een goeie startdiscussie opleveren, aangezien niet iedereen de tweede soort onmiddellijk zal aanvaarden.

Merk op: in deze Subsectie wordt er niet gesproken over een zogenaamd 'domain of discourse' of over het binden van variabelen aan de kwantor. Het is dus simpelweg de symbolen $\forall$ en $\exists$ die ingevoerd worden, en (nog) niet $\forall x \in \mathbb{R}$ of $\forall x$. Als u dit aan bod wil laten komen, zal u hiervoor zelf iets moeten maken.

Sectie 5

Deze Sectie bevat drie verdiepingsoefeningen. De eerste oefening kwam ook voor in Uitwiskeling van zomer 2021. Deze oefeningen zijn zeker geen verplichte leerstof. Voor het geven van de oefening in Subsectie 5.1 bekijkt u best eens de Subsectie 3.2 over visualisatie met waarheidsmatrices. Oefening 5.3 is gebaseerd op deze website.

7 Oplossingsleutel

Oefening 2.2

"Als de maan van kaas gemaakt is, dan is er geen paus." is een ware uitspraak. Dit komt omdat "De maan is gemaakt van kaas." vals is. Als p vals is in $p \Rightarrow q$, dan is $p \Rightarrow q$ sowieso waar.

1. De eerste eigenschap die we bekijken is de uitspraak $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.

   (a) De waarheidstabel is:

p	q	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

   (b) Die uitspraak lees je dan als "Als ik graag brownies eet, dan ben ik goed in wiskunde; of, als ik goed ben in wiskunde, dan eet ik graag brownies.".

   (c) Die uitspraak lees je dan als "Als er veel natuurlijke getallen zijn, dan is er wereldvrede; of, als er wereldvrede is, dan zijn er veel natuurlijke getallen.".

   (d) Als je twee willekeurige uitspraken p en q hebt, die misschien niets met elkaar te maken hebben, dan is het toch zo dat er een implicatie is tussen de twee. Zonder de waarheidswaarden van p en q weet je niet in welke richting, maar er zal altijd één van de twee uitspraken de andere impliceren.

2. De tweede eigenschap die we bekijken is de uitspraak $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

   (a) De waarheidstabel is:

p	q	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

   (b) We hebben $p =$ "De aarde is rond." en $q =$"Het regent.". Wat betekent $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ dan? Die uitspraak lees je dan als "Als de aarde rond is, dan is het zo dat als het regent, de wereld aarde is.".

(c) We nemen bijvoorbeeld $q =$"Ik eet graag kaas." Die uitspraak lees je dan als "Als de aarde rond is, dan is het zo dat als ik graag kaas eet, de aarde rond is.".

(d) Als je een ware uitspraak p hebt, dan wordt die geïmpliceerd door iedere uitspraak.

3. De laatste eigenschap die we bekijken is de uitspraak $(q \wedge \neg q) \Rightarrow p$.

(a) De waarheidstabel is:

p	q	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\Rightarrow$	p
0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

(b) We nemen $p =$"Ik ben rijk." en voor $q =$"Het regent.". Die uitspraak lees je dan als "Als het regent en niet regent, dan ben ik rijk.". Als we nu $q =$"$1 + 1 = 2$" nemen, dan wordt het "Als $1 + 1$ wel en niet gelijk is aan 2, dan ben ik rijk.". Met andere woorden, we kunnen de uitspraak telkens lezen als "Als er een contradictie is, dan ben ik rijk.".

(c) Uit een contradictie volgt alles. Je kan voor p gelijk welke uitspraak kiezen; als er ergens een contradictie gevonden wordt, dan is p waar. Dit wordt ook wel *the principle of explosion* genoemd, aangezien een contradictie explodeert en alles waar maakt.

Oefening 5.1

Per uitspraak zijn er drie mogelijkheden: T, U of F. Als we twee uitspraken beschouwen, zijn er dus drie mogelijkheden voor de eerste uitspraak **en** drie voor de tweede. In het totaal zijn er dus $3 \cdot 3$ mogelijkheden.

Conjunctie

De uiteindelijke waarheidsmatrix is

$\wedge$	T	U	F
T	T	U	F
U	U	U	F
F	F	F	F

Deze bekom je door de volgende redeneringen.

- Als er één van de twee uitspraken vals is in $p \wedge q$, dan weten we al zeker dat $p \wedge q$ vals moet zijn. Het maakt dan niet meer uit welke waarde de andere uitspraak heeft. Daarom zijn de onderste rij en de rechtse kolom overal F.
- Voor de waarden van $T \wedge U$ en $U \wedge T$ hangt de waarde af van die U. Moest de 'Unknown' uitspraak waar zijn, dan zou de conjunctie waar zijn; moest hij vals zijn, dan zou de conjunctie vals zijn. Dit geeft ons dus U als resultaat. Voor $U \wedge U$ kan je op een gelijkaardige manier beredeneren dat de waarheidswaarde opnieuw U moet zijn.

Disjunctie

De uiteindelijke waarheidsmatrix is

$\vee$	T	U	F
T	T	T	T
U	T	U	U
F	T	U	F

Deze bekom je door de volgende redeneringen.

- Als er één van de twee uitspraken waar is, dan weten we al zeker dat hun disjunctie waar moet zijn. Het maakt dan niet meer uit wat de andere uitspraak van waarde heeft. Daarom zijn de bovenste rij en de linkse kolom overal T.

- Voor de waarden van $F \vee U$ en $U \vee F$ hangt de waarde af van die U. Moest de 'Unknown' uitspraak waar zijn, dan zou de disunctie waar zijn; moest hij vals zijn, dan zou de disjunctie vals zijn. Dit geeft ons dus U als resultaat. Voor $U \vee U$ kan je ook het resultaat niet weten door die 'Unknown', dus weer is het resultaat U.

Vervolgens controleren we of onze bovenstaande definitie zorgt dat die logische wet gevolgd wordt. Hiervoor maak je dus onderstaande waarheidstabel. Het is hier handiger om met een waarheidstabel in plaats van een waarheidsmatrix te werken. Aangezien de groene kolommen overeen komen, klopt het dus.

p	q	p	$\vee$	q	$\neg$	$(\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	$q)$
T	T	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	U	T	T	U	T	F	T	F	U	U
T	F	T	T	F	T	F	T	F	T	F
U	T	U	T	T	T	U	U	F	F	T
U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
U	F	U	U	F	U	U	U	U	T	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F	F	T
F	U	F	U	U	U	T	F	U	U	U
F	F	F	F	F	F	T	F	T	T	F

Implicatie

De uiteindelijke waarheidstabel is

$\Rightarrow$	T	U	F
T	T	U	F
U	T	U	U
F	T	T	T

Voor het oplossen van deze vraag zijn er verschillende opties. Je kan intuïtief redeneren op de betekenis van U, maar dat zal hier iets moeilijker zijn. Je kan ook de waarheidstabel van $\neg p \vee q$ opstellen en rechtstreeks de waarheidsmatrix van $\Rightarrow$ aflezen. Ik toon ook een andere optie (die ik uitleg in Sectie 3.2):

Hieronder staat de waarheidsmatrix van $p \vee q$, en die formule lijkt sterk op $\neg p \vee q$.

$\vee$	T	U	F
T	T	T	T
U	T	U	U
F	T	U	F

Om de matrix van $\neg p \vee q$ te verkrijgen, moeten we nog de negatie van de eerste uitspraak erin verwerken. Momenteel staan in de meest linkse kolom de waarheidswaarden van p. Als we eerst nog de negatie nemen van p, vooraleer we kijken naar de $\vee$, dan moeten we de rijen manipuleren. In de rij waar p de waarde U heeft, maakt de negatie niet uit. Deze rij blijft dus gewoon hetzelfde. In de eerste rij heeft p waarde T, en heeft $\neg p$ waarde F. Om de eerste rij van de waarheidsmatrix van $\neg p \vee q$ in te vullen (waar p de waarde T heeft), moet je dus de rij overnemen in bovenstaande matrix van $p \vee q$ waar p de waarde F heeft. Op die manier wisselen de bovenste en onderste rij dus effectief om, als we de negatie van de eerste uitspraak nemen. Zo krijgen we de matrix van $\Rightarrow$.

Praktische toepassing

We hebben $p =$"de persoon rookt" en $q =$"de persoon is gestorven". Als niet geweten is of de persoon rookt, dan heeft p als waarheidswaarde U. Kijk dus in de waarheidsmatrix van $\wedge$ waar p waarde U heeft.

$\wedge$	T	U	F
T	T	U	F
U	U	U	F
F	F	F	F

Je ziet dat daar voor geen enkele waarde van q de waarde T voorkomt. De mensen waarvan je niet weet of ze roken, zullen dus niet meegenomen worden in de dataset.

Oefening 5.2

1. Hiervoor moeten we een waarheidstabel maken. De Tabel vind je hieronder.

p	q	$(q$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	p
0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

   Aangezien de groene kolommen gelijk zijn, is het een identieke operatie.

2. Je zou hier ook een waarheidstabel kunnen maken. Het is echter zo dat deze operatie dezelfde is als de vorige. Immers, $q \Rightarrow q$ heeft altijd dezelfde waarde als $\neg q \vee q$. Dus $(q \Rightarrow q) \wedge$ voor p zetten zal altijd dezelfde waarde hebben als $(q \vee \neg q) \wedge$ voor p zetten. Aangezien de vorige operatie identiek is, is deze operatie ook identiek.

3. $\top \wedge$ voor een uitspraak zetten is inderdaad een identieke operatie. Dit kon je daarnet al zien, aangezien $q \Rightarrow q$, en ook $\neg q \vee q$, altijd waar is. De waarheidstabel staat hieronder.

p	$\top$	$\wedge$	p
0	1	0	0
1	1	1	1

4. $\bot \vee$ voor een uitspraak zetten is ook een identieke operatie. Je kan dit snel intuïtief inzien: de $\bot$ zal de $\vee$ nooit waar maken, het is enkel de p die daarop volgt die het resultaat bepaalt. Je ziet het ook in de waarheidstabel hieronder.

p	$\bot$	$\vee$	p
0	0	0	0
1	0	1	1

Oefening 5.3

1. De Tabel vind je hieronder.

p	q	p	$\Rightarrow$	q	$\neg$	p	$\vee$	q
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1

2. De Tabel vind je hieronder.

p	q	p	$\vee$	q	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	q
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. De wetten van De Morgan zeggen dat $p \vee q$ altijd dezelfde waarde heeft als $\neg(\neg p \wedge \neg q)$. Dit betekent dat $\vee$ uitgedrukt kan worden met $\neg$ en $\wedge$.

4. Merk op in de waarheidstabel van $\mid$ dat wanneer zowel p als q vals zijn, dan is $p \mid q$ waar. En als zowel p als q waar zijn, dan is $p \mid q$ vals.

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dat lijkt dus al een beetje op de negatie, maar we zitten nog met die q die niets te maken heeft met p. We willen onze observatie gebruiken om $\neg p$ uit te drukken, maar daarvoor moeten we nu een q vinden die altijd dezelfde waarde heeft als p. Neem dus voor q simpelweg de uitspraak p en dan krijg je de volgende Tabel.

p	$\neg$	p	p	$\mid$	p
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1

We kunnen dus inderdaad $\neg p$ uitdrukken als $p \mid p$.

5. In de uitleg van $|$ stond er dat $p \mid q$ eigenlijk de negatie is van $p \wedge q$. Dit betekent dat $p \mid q$ altijd dezelfde waarheidswaarde heeft als $\neg(p \wedge q)$. Dat lijkt al redelijk goed op $p \wedge q$; we moeten alleen nog de $\neg$ wegwerken. En de $\neg$ heb je daarnet uitgedrukt met $|$. Hieronder staat een overzicht van de overgangen.

$$\begin{array}{rlr}
p \mid q & \text{heeft altijd dezelfde waarde als} & \neg(p \wedge q) \\
\neg(p \mid q) & \text{heeft altijd dezelfde waarde als} & \neg\neg(p \wedge q) \\
\neg(p \mid q) & \text{heeft altijd dezelfde waarde als} & (p \wedge q) \\
(p \mid q) \mid (p \mid q) & \text{heeft altijd dezelfde waarde als} & (p \wedge q)
\end{array}$$

Eerst schrijven we $p \mid q$ als $\neg(p \wedge q)$. Vervolgens zetten we voor die beide uitspraken een $\neg$. Daarna valt de dubbele negatie in de rechteruitspraak weg. Tot slot vervangen we in de linkeruitspraak de $\neg$ door de uitspraak met $|$ van de vorige vraag. Zo hebben we dus een uitspraak gevonden met $|$ die altijd dezelfde waarde heeft als $p \wedge q$, namelijk de uitspraak $(p \mid q) \mid (p \mid q)$.